



TD n°12: Théorie du potentiel

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un † sont à faire en priorité, ceux marqués d'un † sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

On rappelle (ou admet) le théorème suivant :

Théorème (Caractérisation du potentiel logarithmique). *Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction semi-continue supérieurement telle que*

(i) *g est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K$,*

(ii) *$g(z) = \log |z| + O(1)$ quand $z \rightarrow \infty$,*

(iii) *$g(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \zeta \in \partial K$ pour ζ en dehors d'un ensemble polaire.*

Alors, sur $\mathbb{C} \setminus K$, on a :

$$g = U_{\mu_K} - I(\mu_K) = \log |z| - \log \text{Cap}(K) + o(1).$$

Une telle fonction est appelée fonction de Green de $\mathbb{C} \setminus K$.

Potentiels et énergie.

Exercice 1. Inégalités énergie-potentiel.

Soit K un compact de \mathbb{C} , μ_K sa mesure d'équilibre. Soit également ν une mesure de probabilité sur \mathbb{C} .

1. Démontrer que si $\text{Supp}(\nu) \subseteq K$, alors

$$\inf_K U_\nu \leq I(\mu_K).$$

2. Démontrer à l'aide du théorème de Frostman que (sans supposition sur $\text{Supp}(\nu)$), on a

$$\sup_K U_\nu \geq I(\mu_K).$$

Exercice 2. Quelques potentiels.

1. Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$

où $\log^+ t$ désigne $\max(\log(t), 0)$ et en déduire $U_{\mu_{a,R}}$ pour $\mu_{a,R}$ la mesure de Lebesgue normalisée du cercle de centre a et de rayon R .

2. Calculer U_μ pour μ la mesure de Lebesgue du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 3. Inégalité dans le théorème de Frostman.

Soit K un compact non-polaire de \mathbb{C} et $E \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ polaire tel que $K' = K \cup E$ est compact. Soient $\mu_K, \mu_{K'}$ les mesures d'équilibre de K, K' .

1. Démontrer que $I(\mu_{K'}) > -\infty$.
2. Démontrer que $\mu_{K'}(E) = 0$, et en déduire que $\mu_K = \mu_{K'}$.
3. Démontrer que si $K = \overline{\mathbb{D}}$, alors $U_{\mu_{K'}} > I(\mu_{K'})$ sur E .

†Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Capacités et diamètres transfinis.

Exercice 4. Quelques capacités.

Pour cet exercice, on admet le résultat de l'exercice 7.

1. Calculer la capacité de l'anneau $r \leq |z| \leq R$.
2. Calculer en termes de la capacité du segment $[0, 1]$ la capacité du hérisson

$$H = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[0, e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right].$$

En déduire la capacité du segment $[0, 1]$ en l'appliquant à $n = 2$, en admettant qu'elle n'est pas nulle.

3. Soit K un compact de \mathbb{C} vérifiant $q^{-1}(K) = K$ pour un polynôme q . Démontrer que soit K est polaire, soit $\text{Cap}(K) = |a_d|^{-\frac{1}{d-1}}$, où d est le degré de q et a_d son coefficient dominant. Utiliser ce résultat pour retrouver la capacité du cercle et du disque.
4. On admet (c'est une généralisation du raisonnement fait dans un TD précédent) que $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ envoie $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, r)$, $r > 1$, sur $\mathbb{C} \setminus E_{a,b}$, où $E_{a,b}$ est l'ellipse de demi-axes $a = r + 1/r$, $b = r - 1/r$, c'est-à-dire définie par $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$.
Démontrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, la capacité de l'ellipse $E_{a,b}$ de demi-axes a, b est

$$\text{Cap}(E_{a,b}) = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 5. Inégalités de diamètres transfinis.

1. Soient X, Y deux compacts métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une application A -lipschitzienne surjective. Démontrer que

$$\tau(Y) \leq A\tau(X).$$

2. En déduire que $\tau([0, 1]) \geq \frac{1}{2\pi}$.

Exercice 6. Capacité et mesure de Lebesgue.

Soit μ une mesure borélienne à support compact sur \mathbb{C} vérifiant $I(\mu) > -\infty$ et E un borélien de \mathbb{C} .

1. (a) Supposons que $\mu(E) > 0$. Démontrer qu'il existe un compact $K \subseteq E$ vérifiant $\mu(K) > 0$ et

$$I(\mu|_K) \geq I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log(d)$$

où d est le diamètre de $\text{Supp}(\mu)$.

- (b) En déduire que E est non-polaire.

2. En déduire qu'un sous-ensemble de \mathbb{C} (resp. de \mathbb{R} , resp. de \mathbb{U}) de mesure de Lebesgue > 0 n'est jamais polaire.

Exercice 7. Capacité d'une image inverse par un polynôme.

Soit $q(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact non-polaire. On note $U = \mathbb{C} \setminus K$, $V = \mathbb{C} \setminus q^{-1}(K)$. On note respectivement g_U et g_V les fonctions de Green de U et V .

1. Vérifier que $q(V) = U$ et $q(q^{-1}(K)) = K$, et démontrer que $q(\partial q^{-1}(K)) = \partial K$.
2. Vérifier que $g_U(q(z))$, définie sur \mathbb{C} , est nulle sur $q^{-1}(K)$ sauf peut-être en un sous-ensemble polaire du bord, et harmonique sur V .
3. En déduire que $g_U(q(z)) = dg_V(z)$.
4. En déduire finalement que

$$\text{Cap}(q^{-1}(K)) = \left(\frac{\text{Cap}(K)}{|a_d|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

 **Exercice 8. Capacités de Cantors**

Soit $\mathbf{s} = (s_n)_n$ une suite de nombres réels strictement compris entre 0 et 1. On définit récursivement $C() = [0, 1]$, et

$$C(s_1, \dots, s_n) = \left(\frac{1-s_1}{2} C(s_2, \dots, s_n) \right) \cup \left(\frac{1+s_1}{2} + \frac{1-s_1}{2} C(s_2, \dots, s_n) \right).$$

On définit $C(\mathbf{s}) = \bigcap_{n \geq 1} C(s_1, \dots, s_n)$. On pose finalement

$$p = \prod_{n \geq 1} (1-s_n)^{\frac{1}{2^n}}, \quad q = \prod_{n \geq 1} s_n^{\frac{1}{2^n}}.$$

Pour cet exercice, on utilisera librement les inégalités (1) et (2) de l'exercice suivant.

1. Démontrer que

$$\log \text{Cap}(C(s_1, \dots, s_n)) \leq \frac{1}{2} \log \text{Cap}(C(s_2, \dots, s_n)) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-s_1}{2} \right).$$

2. En déduire que


$$\log \text{Cap}(C(\mathbf{s})) \leq \log(p) - \log(2).$$

3. Similairement, démontrer que

$$\log \text{Cap}(C(s_1, \dots, s_n)) \geq \frac{1}{2} \log(s_1) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-s_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \text{Cap}(C(s_2, \dots, s_n)).$$

4. En déduire que

$$\log \text{Cap}(C(\mathbf{s})) \geq \log(pq) - \log(2).$$

 **Exercice 9. Estimations de capacités**

Le but de cet exercice est de prouver deux inégalités : soient K_1, K_2 deux compacts, $K = K_1 \cup K_2$ leur union. On a

$$\frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K))} \leq \frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K_2))} \quad (1)$$

et

$$\frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K))} \geq \frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K_2))} \quad (2)$$

où δ est le diamètre de K et d la distance entre K_1 et K_2 . On note μ la mesure d'équilibre de K et μ_j celle de K_j .

1. On commence par la première inégalité.

(a) Justifier qu'il suffit de prouver l'inégalité pour $\delta = 1$, et qu'on a alors $\text{Cap}(K) \leq 0$.

(b) Démontrer que pour $j = 1, 2$, on a

$$I(\mu) \leq \int_{\mathbb{C}} U_{\mu} d\mu_j.$$

(c) En déduire que

$$I(\mu) \leq \int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu.$$

(d) Démontrer que $\int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu = \mu(K_j)I(\mu_j)$.

(e) En déduire que

$$-\frac{\mu(K_1) + \mu(K_2)}{I(\mu)} \leq -\frac{1}{I(\mu_1)} - \frac{1}{I(\mu_2)}$$

puis que

$$\frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K))} \leq \frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K_2))}.$$

2. On montre la deuxième inégalité.

(a) Vérifier qu'il suffit de le prouver pour $d = 1$.

(b) Vérifier que si $\text{Cap}(K) \geq 1$ ou K_j est polaire, l'égalité est trivialement vérifiée. On suppose à partir de maintenant que $0 < \text{Cap}(K_j) \leq \text{Cap}(K) < 1$.

(c) On pose $t = \frac{I(\mu_1)}{I(\mu_1) + I(\mu_2)}$, et

$$\nu = (1 - t)\mu_1 + t\mu_2.$$

Vérifier que ν est une mesure de probabilité supportée sur K et vérifiant

$$I(\nu) \geq (1 - t)^2 I(\mu_1) + t^2 I(\mu_2).$$

(d) En déduire que

$$I(\mu) \geq \frac{I(\mu_1)I(\mu_2)}{I(\mu_1) + I(\mu_2)}$$

et conclure.